УДК 517.929

Б. Г. Гребенщиков

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ С ЛИНЕЙНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Изучим поведение решений однородной системы вида

$$dx/dt = Ax(t) + Bx(\mu t),\;\; \mu = const,\, 0 < \mu < 1,\, t \geq t_0 > 0. \tag{1}$$

Здесь A, B — постоянные матрицы размерности m, $x(t)$ — m-мерная вектор-функция времени t, причем для собственных чисел λ_i матрицы A справедливо неравенство

$$Re\lambda_i < -\beta,\;\; \beta = const,\, \beta > 0. \tag{2}$$

Отметим, что вследствие условия (2) существует матрица A^{-1}. Далее, для собственных чисел ρ_j матрицы $A^{-1}B$ справедливо условие

$$|\rho_j| = 1, \tag{3}$$

при этом полагаем, что среди собственных значений ρ_j найдется такое $\overline{\rho}$, которому соответствует жорданова клетка (матрицы $-A^{-1}B$) размерности большей чем 1, т.е. разностная система

$$z_{n+1} = -A^{-1}Bz_n \tag{4}$$

неустойчива. В момент времени t_0 решение системы (1) определяется начальной вектор-функцией $\phi(s) : s \in [\mu t_0, t_0]$. Запаздывание $\gamma(t) = (1-\mu)t$ является линейной функцией времени t.

Теорема. *При выполнении условий* $(2), (3), (4)$ *решение системы* (1)*, определенное любой начальной вектор-функцией* $\phi(s) \neq 0$*, неустойчиво.*

Доказательство. Пусть $\dfrac{t_0}{\mu^{k+1}} \leq h \leq t$, где $h = const, h > 0, k$ — достаточно большое целое положительное число. Известно [1], что в случае неотрицательности запаздывания $\gamma(t) = (1-\mu)t$ решение системы (1) на отрезке $[t_0, t]$ существует и единственно, причем при $t \geq h$ существуют и непрерывны производные до $k+1$-го порядка включительно (решение сглаживается [1]). Продифференцируем обе части равенства (1) по t. Получаем линейную систему

$$d^2x(t)/dt^2 = Ax'(t) + \mu Bx'(\mu t),\;\; t \geq h.$$

Вновь дифференцируем обе части полученной системы по t. Получаем равенство

$$d^3x(t)/dt^3 = Ax^{(2)}(t) + \mu^2 Bx^{(2)}(\mu t).$$

Вообще, на k-м шаге получаем стационарную систему линейных дифференциальных уравнений вида

$$dx^{(k)}(t)/dt = Ax^{(k)}(t) + \mu^k Bx^{(k)}(\mu t), \;\; t \geq h. \tag{5}$$

Очевидно, начальным множеством для системы (5) является сегмент $[\mu h, h]$, т.е. на нем задана вектор-функция $\overline{\phi}(t)$, определяющая решение данной системы в момент времени $t = h$.

Вследствие неравенства (2) справедлива оценка [2]

$$\|e^{A(t-s)}\| \leq Me^{-\beta(t-s)}, \tag{6}$$

где $s \leq t$, $M = const$, $M \geq 1$. Здесь и далее под нормой матрицы D понимаем

$$\|D\| = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{m} |d_{ij}|,$$

где d_{ij} — компоненты матрицы D [2]. Очевидно, что при достаточно большом k справедливо неравенство

$$\frac{\|B\|\mu^k}{\beta} < 1. \tag{7}$$

Тогда решение системы (5) асимптотически устойчиво, причем справедлива оценка

$$\|x^{(k)}(t)\| \leq M_k \left(\frac{t}{h}\right)^{\delta_k}, \tag{8}$$

где $t \geq h$, $M_k = const$, $M_k \geq 1$, $\delta_k = const$, $\delta_k < 0$. Доказательство этого факта производится сравнением решения системы (5) с решением $y(t)$ уравнения первого порядка [3],[4]:

$$\begin{aligned} &dy(t)/dt = -\beta y(t) + p(t)y(\mu t), \;\; t \geq h, \\ &p(t) = \tfrac{\beta}{\mu^{\delta_k}} + \tfrac{\delta_k}{\mu^{\delta_k} t}, \;\; \delta_k = const, \;\; \delta_k < 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Пусть $y(t) = M_k \left(\frac{t}{h}\right)^{\delta_k}$ на начальном множестве. Нетрудно видеть, что решением уравнения (9) является функция

$$y(t) = M_k \left(\frac{t}{h}\right)^{\delta_k}, \;\; M_k = const, \;\; M_k > 0. \tag{10}$$

[Это можно проверить простой подстановкой функции (10) в уравнение (9).]

Запишем решение системы (5) в форме Коши [2], принимая члены в правой части, зависящие от запаздывания, за неоднородность:

$$x^{(k)}(t) = e^{A(t-h)}x^{(k)}(h) + \int_h^t e^{A(t-s)}\mu^k Bx^{(k)}(\mu s)\, ds, \;\; t > h. \tag{11}$$

Из выражения (11), используя оценку (6), получаем неравенство

$$\|x^{(k)}(t)\| \le Me^{-\beta(t-h)}\|x^{(k)}(h)\| + \int_h^t Me^{-\beta(t-s)}\mu^k\|B\|\|x^(k)(\mu s)\|\, ds. \tag{12}$$

Записывая решение уравнения (9) в форме Коши, получаем выражение

$$y(t) = M_k e^{-\beta(t-h)} + \int_h^t e^{-\beta(t-s)}p(s)y(\mu s)ds. \tag{13}$$

Обозначим $\|x^{(k)}(t)\| - y(t) = z(t)$ и вычтем (13) из (12). Получим неравенство

$$z(t) \le (M\|x^{(k)}(h)\| - M_k)e^{-\beta(t-h)} + \int_h^t Me^{-\beta(t-s)}\mu^k\|B\|z(\mu s)ds +$$
$$+ \int_h^t (Me^{-\beta(t-s)}\mu^k\|B\| - e^{-\beta(t-s)}p(s))y(\mu s)ds. \tag{14}$$

Выберем теперь $\delta_k < 0$ таким образом, чтобы выполнялась оценка

$$M\mu^k\|B\| - \frac{\beta}{\mu^{\delta_k}} - \frac{\delta_k}{t\mu^{\delta_k}} < 0, \;\; t \ge h. \tag{15}$$

Данный выбор возможен, поскольку при $\delta_k = 0$ имеем неравенство, аналогичное неравенству (7). Тогда, в силу непрерывности по δ_k, найдется такое $\delta_k < 0$, что оценка (15) будет справедливой. Далее, за счет выбора $M_k > 0$ можно сделать так, чтобы выполнялись условия

$$y(t) > \|\overline{\phi}(t)\| : \;\; \mu h \le t \le h, \;\; M_k > M\|x^{(k)}(h)\|. \tag{16}$$

Тогда, учитывая неравенства (14),(15) и (16), получаем из выражения (14) неравенство

$$z(t) < \int_h^t Me^{-\beta(t-s)}\mu^k\|B\|z(\mu s)ds. \tag{17}$$

Как следует из соотношений (16), $z(t) < 0$ на начальном множестве $[\mu h, h]$. Утверждается, что $z(t) < 0$ при всех $t > h$. Предположим противное. Пусть $t' > h$ — первая точка, где $z(t) = 0$. Тогда из неравенства (17) получаем соотношение

$$0 = z(t') < \int_h^{t'} Me^{-\beta(t-s)}\mu^k\|B\|z(\mu s)ds < 0, \tag{18}$$

т.к. $z(t) < 0$ при $t < t'$. Полученное противоречие и доказывает оценку (8). Полагая $\phi_k(t) = y(t) : \ \mu h \le t \le h$ и учитывая равенство (10), получим из оценки (8) более грубое неравенство

$$\|x^{(k)}(t)\| \le M_k \left(\frac{t}{h}\right)^{\delta_k} \max_s \|\phi_k(s)\|, \ \mu h \le s \le h. \tag{19}$$

Рассмотрим теперь поведение $x^{(k-1)}(t)$ при $t \to \infty$. Очевидно, $x^{(k-1)}(t)$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$dx^{(k-1)}(t)/dt = Ax^{(k-1)}(t) + \mu^{k-1}Bx^{(k-1)}(\mu t),$$

при этом $x^{(k)}(t)$ при $h \ge \dfrac{t_0}{\mu^{k+1}}$ удовлетворяет оценке (19). Разрешив данное соотношение относительно $x^{(k-1)}(t)$, получаем неоднородную разностную систему [5]

$$x^{(k-1)}(t) = -\mu^{k-1}A^{-1}Bx^{(k-1)}(\mu t) + A^{-1}x^{(k)}(t). \tag{20}$$

Здесь считаем неоднородностью выражение $A^{-1}x^{(k)}(t)$, причем для данной величины справедлива оценка, аналогичная оценке (19). Будем исследовать решение данной системы по шагам переменной длины, а именно на интервалах вида $\dfrac{h}{\mu^n} \le t \le \dfrac{h}{\mu^{n+1}}, \ n = 1, 2, \dots$, для чего запишем решение данной неоднородной системы с помощью формулы вариации постоянных [5]; получаем для $x^{(k-1)}(t)$ при $\dfrac{h}{\mu^n} < t \le \dfrac{h}{\mu^{n+1}}$ следующее равенство:

$$\begin{aligned} x^{(k-1)}(t) \ &= \ \mu^{(k-1)(n+1)}(-A^{-1}B)^{n+1}\phi_{k-1}(\mu^{n+1}t) + \\ &+ \sum_{j=0}^{n} \mu^{(k-1)j}(-A^{-1}B)^j A^{-1}x^{(k)}(\mu^j t) \end{aligned} \tag{21}$$

(здесь $\phi_{k-1}(t) = x^{(k-1)}(t) : \ \mu h \le t \le h$). Вследствие соотношения (3) справедлива оценка [5]

$$\|\mu^{j(k-1)}(-A^{-1}B)^j\| \le L\mu^{(k-2)j}a^j, \tag{22}$$

где $L = const$, $L \ge 1$, $a = const$, $0 < a < 1$. Тогда из равенства (21), учитывая оценки (9) и (22), получаем неравенство

$$\begin{aligned} \|x^{(k-1)}(t)\| \ &\le \ L\mu^{(k-2)(n+1)}a^{n+1} \max_{\mu h \le t \le h} \|\phi_{k-1}(t)\| + \\ &+ \sum_{j=0}^{n} L\mu^{(k-2)j}a^j\mu^{\delta_k(j-n)}M'_k \max_{\mu h \le t \le h} \|\phi_k(t)\|, \end{aligned} \tag{23}$$

где $M_k' = M_k\|A^{-1}\|$. Первое слагаемое в правой части данного выражения стремится к нулю при $n \to \infty$. Рассмотрим поведение второго слагаемого. Пусть $a > \mu^{-\delta_k}$, т.е. $\mu^{-\delta_k} = \alpha a$, где $\alpha = const$, $0 < \alpha < 1$. В этом случае справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}\mu^{(k-2)j}a^j\mu^{\delta_k(j-n)} &= \sum_{j=0}^{n}\mu^{(k-2)j}a^j\alpha^{n-j}a^{n-j} \le a^n\sum_{j=0}^{n}\alpha^j,\\ a^n\sum_{j=0}^{n}\alpha^j &\le \frac{a^n}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Отсюда получаем следующую оценку для второго слагаемого в правой части выражения (23):

$$L\sum_{j=0}^{n}\mu^{k-2}\mu^{\delta_k(j-n)}a^jM_k'\max_{\mu h\le t\le h}\|\phi_k(t)\| \le \frac{a^nLM_k'}{1-\alpha}\max_{\mu h\le t\le h}\|\phi_k(t)\|. \tag{24}$$

Наоборот, пусть $a < \mu^{-\delta_k}$. Тогда, полагая $a = \alpha\mu^{-\delta_k}$, где $\alpha = const$, $0 < < \alpha < 1$, получаем оценки

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}\mu^{(k-2)j}a^j\mu^{\delta_k(j-n)} &= \sum_{j=0}^{n}\mu^{(k-2-)j-\delta_kn}\alpha^j \le \mu^{-\delta_kn}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j,\\ \mu^{-\delta_kn}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j &= \frac{\mu^{-\delta_kn}}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Далее получаем соотношение

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{n}L\mu^{(k-2)j}a^j\mu^{-\delta_k(j-n)}M_k'\max_{\mu h\le t\le h}\|\phi_k(t)\| \le\\ &\qquad\le \frac{\mu^{-\delta_kn}LM_k'}{1-\alpha}\max_{\mu h\le t\le h}\|\phi_k(t)\|.\end{aligned} \tag{25}$$

Наконец, пусть $a = \mu^{-\delta_k}$. В этом случае получаем

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}\mu^{(k-2)j}a^n &\le \frac{a^n}{1-\mu^{k-2}},\ \ k \ne 2;\\ \sum_{j=0}^{jn}\mu^{k-2}a^n &= (n+1)a^n \le \frac{a^{n/2}}{1-a^{1/2}},\ \ k = 2,\end{aligned}$$

откуда для второго слагаемого в правой части неравенства (23) будут справедливы оценки

$$\sum_{j=0}^{n} L\mu^{(k-2)j} a^n M_k' \max_{\mu h \le t \le h} \|\phi_k(t)\| \le$$
$$\le \frac{LM_k' a^n}{1-\mu^{k-2)}} \max_{\mu h \le t \le h} \|\phi_k(t)\|, \;\; k \neq 2; \tag{26}$$
$$\sum_{j=0}^{n} L\mu^{(k-2)j} a^n M_k' \max_{\mu h \le t \le h} \|\phi_k(t)\| \le$$
$$\le \frac{LM_k' a^{n/2}}{1-a^{1/2}} \max_{\mu h \le t \le h} \|\phi_k(t)\|, \;\; k = 2. \tag{27}$$

Окончательно получаем, что и второе слагаемое в правой части неравенства (23) стремится к нулю при $n \to \infty$.

Вследствие сказанного выше найдутся постоянные величины q_{k-1}, M_{k-1} : $0 < q_{k-1} < 1, \;\; M_{k-1} > 1$ такие, что при $\dfrac{h}{\mu^n} < t \le \dfrac{h}{\mu^{n+1}}$ будет выполняться оценка

$$\|x^{(k-1)}(t)\| \le M_{k-1} q_{k-1}^n (\max_{\mu h \le t \le h} \|\phi_k(t)\| + \max_{\mu h \le t \le h} \|\phi_{k-1}(t)\|). \tag{28}$$

Рассмотрим теперь асимптотическое поведение величины $x^{(k-2)}(t)$. Исследование устойчивости величины $x^{(k-2)}(t)$, в свою очередь, приводит к исследованию поведения решения неоднородной разностной системы

$$x^{(k-2)}(t) = -\mu^{k-2} A^{-1} B x^{(k-2)}(\mu t) + A^{-1} x^{(k-1)}(t), \;\; t \ge h, \tag{29}$$

причем $x^{(k-1)}(t)$ удовлетворяет оценке

$$\|x^{(k-1)}(t)\| \le M_{k-1} \left(\frac{t}{h}\right)^{\delta_{k-1}} (\max_{\mu h \le t \le h} \|\phi_k(t)\| + \max_{\mu h \le t \le h} \|\phi_{k-1}(t)\|). \tag{30}$$

Здесь $\delta_{k-1} < 0, \;\; \delta_{k-1} = -\log_\mu q_{k-1}$.

Если мы теперь проделаем выкладки, аналогичные прежним, то в результате будем получать следующие оценки:

$$\|x^{(j)}(t)\| \le M_j q_j^n \left[\sum_{i=j}^{k} \max_{\mu h \le t \le h} \|\phi_i(t)\|\right], \;\; \frac{h}{\mu^n} < t \le \frac{h}{\mu^{n+1}},$$
$$\|x^{(j)}(t)\| \le M_j \left(\frac{t}{h}\right)^{\delta_j} \left[\sum_{i=j}^{k} \max_{\mu h \le t \le h} \|\phi_i(t)\|\right], \; t \ge h, \; j = 1, 2, ..., k, \tag{31}$$

где $q_j = const$, $0 < q_j < 1$, $\delta_j = -\log_\mu q_j$, $\phi_j(t) = x^{(j)}(t)$: $\mu h \le t \le h$, $j = 1, 2, \ldots, k-1$.

Таким образом, $x'(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Рассмотрим неоднородную разностную систему

$$x(t) = -A^{-1}Bx(\mu t) + A^{-1}x'(t). \tag{32}$$

Вследствие того что $x'(t) \to 0$ при $t \to \infty$, решение данной системы $x(t)$ не стремится к нулю при $t \to \infty$, поскольку при достаточно больших t

$$x(t) = -A^{-1}Bx(\mu t) + f(t) \tag{33}$$

(где $f(t)$ — исчезающая вектор-функция [5]). Покажем теперь, что решение системы (1) неустойчиво. Очевидно, решение исходной системы (1) при $t > h_1 \ge \dfrac{h}{\mu^r}$ (r — достаточно большое целое число) может быть записано с помощью формулы вариации постоянных (с учетом того, что матрица $(-A^{-1}B)^{-1}$ существует) следующим образом:

$$x(t) = (-A^{-1}B)^{n+1}\left[x(\mu^{n+1}t) + \sum_{j=0}^{n}(-A^{-1}B)^{i-n-j}A^{-1}x'(\mu^j t)\right], \tag{34}$$
$$\frac{h_1}{\mu^n} < t \le \frac{h_1}{\mu^{n+1}}.$$

Рассмотрим выражение в квадратных скобках в правой части данного соотношения. Вследствие соотношения (3) справедливо неравенство

$$\|\left(-A^{-1}B\right)^{i-n-j}\| \le M_* n^{\alpha(i-n-j)}, \tag{35}$$

где $M_* = const$, $M_* > 0$, $\alpha = const$, $\alpha > 0$. Но тогда, вследствие оценок (31) и (35), найдутся такие положительные постоянные L_*, a_* $(0 < a_* < 1)$, что будет справедливо неравенство

$$\|\left(-A^{-1}B\right)^{i-n-j}A^{-1}x'(t)\| \le$$
$$\le \quad L_*(a_*)^{n-i}M_1\left(\frac{h_1}{h}\right)^{\delta_1}\sum_{j=1}^{k}\max_{\mu h \le t \le h}\|\phi_j(h)\|. \tag{36}$$

Далее, вследствие того что

$$\sum_{i=0}^{n}(a_*)^{n-i} \le \frac{1}{1-a_*};$$
$$\left(\frac{h_1}{h}\right)^{\delta_1} = (\mu)^{-(r\delta_1)} \to 0 : \ r \to \infty, \ \sum_{j=0}^{k}\max_{\mu h \le t \le h}\|\phi_j j\| < \infty,$$

и $x(\mu^{n+1}t)$ не является на интервале $\left[h_1, \frac{h_1}{\mu}\right]$ малой величиной (при достаточно больших h_1), получаем, что при достаточно больших r выражение в квадратных скобках в правой части равенства (34) имеет следующее асимптотическое представление:

$$x(\mu^{n+1}t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \ \ \frac{h_1}{\mu^n} < t \le \frac{h_1}{\mu^{n+1}}. \tag{37}$$

Поскольку $\left(-A^{-1}B\right)^{n+1} = \mathcal{O}(n^{\alpha_*})$, где $\alpha_* = const, \ \ \alpha_* = \alpha - \varepsilon, \ \ \mathcal{O}(n^{\alpha_*}) \to \infty$ при $n \to \infty$ [вследствие чего разностная система (4) неустойчива], получаем для $x(t)$ на интервале $\frac{h_1}{\mu^n} < t \le \frac{h_1}{\mu^{n+1}}$ асимптотическое представление

$$x(t) = \mathcal{O}(n^{\alpha_*})\left[x(\mu^{n+1}t) + \mathcal{O}(\varepsilon)\right], \ \ n \to \infty. \tag{38}$$

Отсюда следует неустойчивость решения исходной системы (1).

Литература

1. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.:Наука, 1971.

2. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости. М.:Наука, 1966.

3. Рожков В.И., Попов А.М. Оценки решений некоторых систем дифференциальных уравнений с большим запаздыванием //Дифференц. уравнения. 1971. Т.7, №2. С.271–278.

4. Гребенщиков Б.Г., Рожков В.И. Асимптотическое поведение решения одной стационарной системы с запаздыванием //Дифференц. уравнения. 1993. Т.29, №5. С.751–758.

5. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.:Мир, 1971.

Статья поступила 04.11.1997 г.;
окончательный вариант 07.12.1998 г.